

**Beregning af momenter i rektangulære plader efter dr. Ing. Marcus
(anmeldelse, kommentar, tabulering)**

F.Sodemann

Tidsskrifter

BSM 12-1 Bygningsstatistiske Meddelelser

1941

BEREGNING AF MOMENTER I REKTANGULÆRE PLADER EFTER DR. ING. MARCUS

(ANMELDELSE, KOMMENTAR, TABULERING)

VED F. SODEMANN, SEN.

Uagtet Spørgsmaalet om Pladeberegning foreligger godt belyst ikke alene i teoretisk Henseende, men ogsaa experimentelt, maa man sige, at de praktiserende Ingeniører her i Landet ikke har draget fuld Nytte af de stedfundne Forskninger paa dette Omraade, men er tilbøjelige til at lade sig nøje med de i Jernbetonnormerne givne temmelig raa Beregningsregler, skønt disse hverken er videre økonomiske eller altid paa den sikre Side.

Grunden til dette Forhold maa søges dels deri, at Pladeteoriens Resultater ikke i sig selv er let overskuelige, men kræver en vis Tilrettelægning, før de bliver simple nok til at anvende i Praksis, og dels deri at mange foretrækker blindt at følge Normerne, fordi de derved føler sig bedst garderede overfor Kritik fra Bygningsautoriteternes Side, skønt Normerne jo i og for sig ikke forbyder Anvendelse af mere rationelle Beregningsmaader, hvorved det i adskillige Tilfælde bliver muligt at opnaa ikke alene større Økonomi, men faktisk ogsaa større Sikkerhed end ved at følge de i Normerne givne Regler. Som det skal vises i det følgende, kan en nøjagtigere Beregningsmaade opstilles paa saadan Maade, at Regnearbejdet bliver yderst simpelt.

Dr. Ingeniør *H. Marcus* har angivet Tilnærmelsesberegninger¹⁾ for rektangulære Plader, paa Grundlag af samme Forfatters »Theorie elastischer Gewebe«. Disse Tilnærmelsesberegninger er i de tyske Jernbetonnormer af 1925 anbefalede til Anvendelse, og de vigtigste af Formlerne er optaget i selve Normerne.

Dr. *Marcus* »Vereinfachte Berechnung« er ikke slet saa overskuelig, eller saa simpel at anvende, som man skulde tro efter Titlen, og der er derfor fra anden Side gjort en Del Forsøg paa at lette de nødvendige Beregninger ved at opstille numeriske eller grafiske Tabeller.

¹⁾ Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, Berlin 1925, Jul. Springer.

For Strimler paa den korte Led $M_{k \max} = p \cdot \frac{k^2}{24} \cdot \frac{l^4}{k^4 + l^4} \cdot \left(1 - \frac{5}{18} \frac{k^2 l^2}{k^4 + l^4}\right)$,

for Strimler paa den lange Led $M_{l \max} = p \cdot \frac{l^2}{24} \cdot \frac{k^4}{k^4 + l^4} \cdot \left(1 - \frac{5}{18} \frac{k^2 l^2}{k^4 + l^4}\right)$.

Største Indspændingsmoment bliver:

For Strimler paa den korte Led $M'_{k \min} = -p \cdot \frac{k^2}{12} \cdot \frac{l^4}{k^4 + l^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{18} \frac{k^2 l^2}{k^4 + l^4}}$,

for Strimler paa den lange Led $M'_{l \min} = -p \cdot \frac{l^2}{12} \cdot \frac{k^4}{k^4 + l^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{18} \frac{k^2 l^2}{k^4 + l^4}}$,

eller noget simpleere som en Gennemsnitsværdi for Indspændingsmomenterne langs Sidernes midterste Del:

$$M'_k = -\frac{pk^2}{12} \cdot \frac{l^4}{k^4 + l^4},$$

$$M'_l = -\frac{pl^2}{24}.$$

Foruden de her gengivne Formler har *Marcus* i sin Bog opstillet Tilnærmelsesformler for rektangulære Plader med alle forskellige Indspændingskombinationer, endvidere for kontinuerlige Plader med hvilende og bevægelig Belastning, og endelig for Plader med Enkeltbelastning i Midten (hvilende saa vel som bevægelig). Formlernes Tilforladelighed godtgøres overalt ved Sammenligning med Resultaterne af en nøjagtig Beregning i Henhold til Pladeteorien, og Anvendelsen paa krydsarmerede Plader vises i hvert enkelt Tilfælde ved gennemregnede Eksempler.

Tabeller over bøjende Momenter.

Som man ser, optræder samtlige Momenter som Funktioner af p , k^2 eller l^2 og Forholdet $\frac{k}{l}$, og man kan da for hver Værdi af $\frac{k}{l}$ een Gang for alle beregne den Koefficient, hvormed pk^2 eller pl^2 skal multipliceres for at give Momentet i de korte og i de lange Strimler. Saadanne Tabeller findes udregnede for jævnt fordelt Belastning af *O. Luetkens*¹⁾ og *Klagas*²⁾. Endvidere foreligger der fra *I. Wachsmann* og *S. Cytryn*³⁾ et Sæt Netstavler, hvorved man for givne Sidelængder og for de forskellige Indspændingstilfælde direkte kan aflæse de positive (ikke de negative) Momenter samt Belastningens Fordeling i de to Retninger, alt for en Belastning af 1000 kg/m². Senere har *Cytryn*⁴⁾ udvidet sine Netstavler til ogsaa at omfatte kontinuerlige Plader.

¹⁾ Der Bauingenieur 1925, S. 659.

²⁾ Der Bauingenieur 1927, S. 221 u. 251.

³⁾ Der Bauingenieur 1928, 3. Aug.

⁴⁾ Der Bauingenieur 1929, 6. Sept.

Tabellerne kan imidlertid simplificeres i væsentlig Grad, naar man bemærker, at Faktoren pk^2 eller pl^2 , der indgaar i Udtrykket for Momentet, kan skrives som $pkl \cdot \frac{k}{l}$ og $pkl : \frac{k}{l}$ eller $P \cdot \frac{k}{l}$ og $P : \frac{k}{l}$, hvor P er Feltbelastningen. Man faar derved Momentet udtrykt som Produktet af P og en Funktion af Forholdet $\frac{k}{l}$, altsaa uafhængig af selve Sidelængderne.

Denne Ordning er anvendt i de nedenfor givne Tabeller 1—4, hvorved der opnaas et bedre Overblik over Momenternes Variation i de forskellige Tilfælde end ved *Luetskens's* og *Klagas's* Tabeller, hvis Koefficienter giver Momenterne ved Multiplikation med snart pk^2 og snart pl^2 . Bruges disse nye Tabeller, findes Momentet i kgm/m simpelthen ved at multiplicere Feltbelastningen i Tons med den til vedkommende Sideforhold $\frac{k}{l}$ svarende Koefficient.

Tabel 1 giver Momenterne for rektangulære Plader med jævnt fordelt Belastning¹⁾. Er Pladen f. Eks. 3 m bred og 5 m lang og indspændt paa de lange Sider, og er Belastningen 1200 kg/m^2 , har man $\frac{k}{l} = 0,6$ og Feltbelastningen $3 \cdot 5 \cdot 1,2 = 18 \text{ t}$. Tabellen giver da for det positive Moment i de indspændte korte Strimler:

$$M_k = 22,0 \cdot 18 = 396 \text{ kgm/m}$$

og for de ikke indspændte lange Strimler:

$$M_l = 5,0 \cdot 18 = 90 \text{ kgm/m}$$

og for Indspændingsmomentet paa den korte Led:

$$\begin{aligned} M'_k &= -73,1 \cdot 18 \\ &= -1315 \text{ kgm/m.} \end{aligned}$$

Tabel 2 giver paa lignende Maade Momenterne i kontinuerlige Pladerækker med jævnt fordelt hvilende Feltbelastning G og bevægelig Feltbelastning P , idet den ugunstigste Belastning regnes at være G paa alle Felter i Forbindelse med P paa hvertandet Felt eller, om man vil, $G + \frac{P}{2}$ paa alle Felter og $\pm \frac{P}{2}$ paa hvertandet Felt samtidig med $\mp \frac{P}{2}$ paa de øvrige Felter.

¹⁾ En tilsvarende Tabel, beregnet efter Normerne 1930, findes paa S. 32 i Forf.s Jernbeton, 1940. Momenterne (for Plader uden Indspænding) faas her ved at dividere Feltbelastningen (kg) med vedkommende Koefficient. Ved Sammenligning ser man, at Momenterne efter *Marcus* bliver ca. 10% mindre end efter Normerne.

Tabel 3 (se S. 181).
Kontinuerlig Pladegruppe.

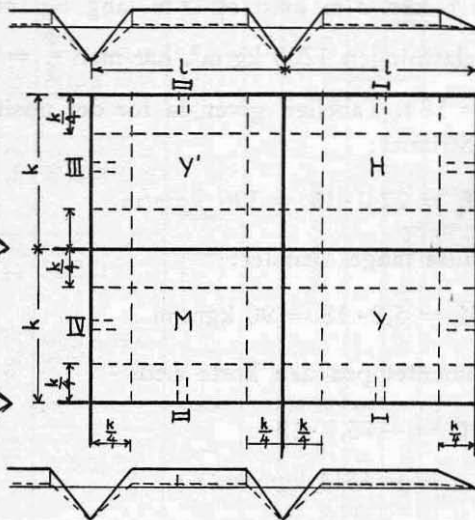
Feltbelastning
k og l i Meter
g og p i t/m² {
hvilende: $G = k \cdot l \cdot g$
bevægelig: $P = k \cdot l \cdot p$
total: $Q = k \cdot l \cdot (g + p)$

Feltmoment
G og P i Tons
M i kgm/m {
 $M_{\max} = \alpha \cdot G + \beta \cdot P$
 $M_{\min} = \alpha \cdot G \div \gamma \cdot P$

Understøttingsmoment $M_u = \div \delta \cdot Q$

k/l	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
0,5	18,6	8,2	10,0	1,8	22,2	7,4	9,6	2,2	0
0,6	28,7	12,0	14,8	2,8	34,3	11,5	14,5	3,0	0
0,7	38,6	15,7	19,4	3,7	46,3	15,9	19,5	3,6	0
0,8	46,9	18,9	23,6	4,7	56,3	20,1	24,2	4,1	0
0,9	52,6	21,1	26,8	5,7	63,0	23,8	28,2	4,4	0
1,0	55,6	22,6	29,6	7,0	66,7	26,9	31,7	4,8	0

Moment i lange Strimler III—III
Yderfelt Y' Hjørnefelt H



Midterfelt M Yderfelt Y
Moment i lange Strimler IV—IV

k/l	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
0,5	9,8	4,6	8,2	3,6	11,8	4,0	7,9	3,9	0
0,6	16,0	7,3	12,4	5,1	19,2	6,5	12,0	5,5	0
0,7	23,0	10,3	16,7	6,4	27,7	9,7	16,4	6,7	0
0,8	30,3	13,3	20,8	7,5	36,4	13,1	20,7	7,5	0
0,9	36,7	15,9	24,2	8,3	44,0	16,6	24,6	8,0	0
1,0	41,7	17,9	27,2	9,3	50,0	19,8	28,2	8,4	0

Moment i korte Strimler II—II
Midterfelt M Yderfelt Y'

Yderfelt Y Hjørnefelt H
Moment i korte Strimler I—I

k/l	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
0,5	39,2	18,4	32,9	14,5	47,1	28,0	37,7	9,7	0
0,6	44,3	20,2	34,5	14,3	53,1	29,0	38,9	9,9	0
0,7	47,0	20,9	34,1	13,2	56,4	28,1	33,7	9,6	0
0,8	47,3	20,7	32,4	11,7	56,7	25,8	35,0	9,2	0
0,9	45,3	19,5	29,9	10,4	54,4	22,9	31,6	8,7	0
1,0	41,7	17,9	27,2	9,3	50,0	19,8	28,2	8,4	0

k/l	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
0,5	40,4	18,9	33,1	14,2	48,5	29,5	38,4	8,9	0
0,6	47,0	21,3	35,1	13,8	56,3	31,7	40,3	8,6	0
0,7	52,1	22,9	35,1	12,2	62,5	32,3	39,8	7,5	0
0,8	55,4	23,6	33,8	10,2	66,4	31,4	37,8	6,4	0
0,9	56,4	23,5	31,9	8,4	67,8	29,4	34,9	5,5	0
1,0	55,6	22,6	29,6	7,0	66,7	26,9	31,7	4,8	0

Tabel 3 indeholder Koefficienter for Momenter i kontinuerlige Pladesgrupper med jævnt fordelt hvilende Feltbelastning G og bevægelig (skaksbrædtfordelt) Feltbelastning P .

Hvis den hvilende Belastning er f. Eks. $G = 6$ t og den bevægelige Belastning $P = 12$ t, faar man, for et Yderfelt Y med Sideforhold 0,6 og en af de korte Sider fri, største positive Moment i de korte Strimler:

$$M_{k \max} = \alpha G + \beta P = 21,3 \cdot 6 + 35,1 \cdot 12 = 549 \text{ kgm/m.}$$

og største negative Feltmoment i samme Strimler I—I:

$$M_{k \min} = \alpha G - \gamma P = 21,3 \cdot 6 - 13,8 \cdot 12 = -39,6 \text{ kgm/m.}$$

For Yderfeltet Y' med en lang Side fri vil største Feltmoment i de korte Strimler være:

$$M_{k \max} = \alpha G + \beta P = 29,0 \cdot 6 + 38,9 \cdot 12 = 641 \text{ kgm/m}$$

og mindste Feltmoment:

$$M_{k \min} = \alpha G - \gamma P = 29,0 \cdot 6 - 9,9 \cdot 12 = +55,2 \text{ kgm/m.}$$

For Indspændingsmomenternes Vedkommende gøres der den i Henhold til Marcus tilladelige Forudsætning, at et Understøtningsmoment kan regnes lig Middeltallet af Understøtningsmomenterne for de to sammenstødende Felter, betragtede hver for sig som fuldt indspændte og fuldt belastede.

Indspændingsmomentet $Y'M$ i Strimlerne II—II bliver da:

$$M'_k = -\delta(G + P) = -53,1(6 + 12) = -956 \text{ kgm/m.}$$

Vridende Momenter.

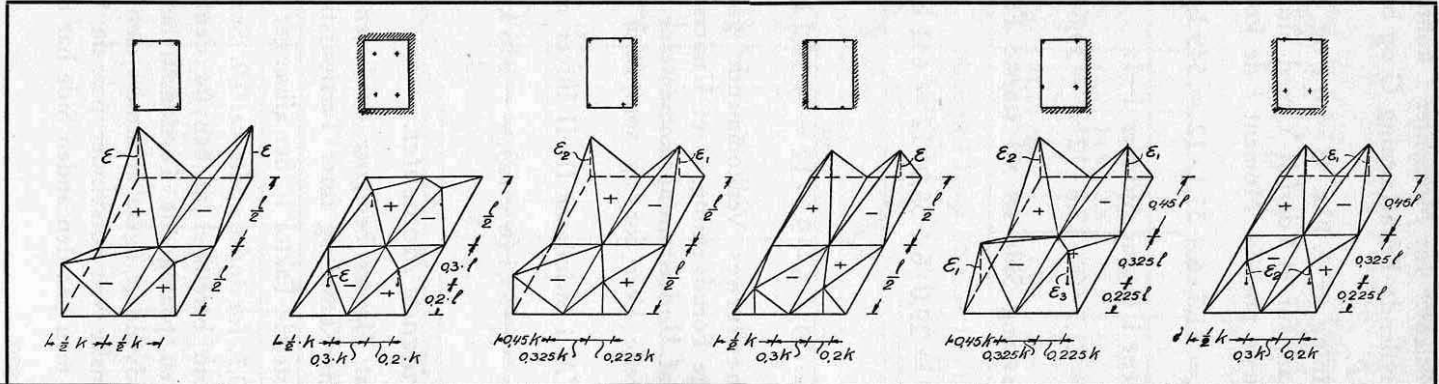
Det er ovenfor nævnt, at Marcus beregner de bøjende Momenter i Strimler parallel med Pladens Kanter og fører Torsionsstivhedens Indflydelse i Regning som en aflastende Faktor ν , der afhænger af $\frac{k}{l}$ og for frit understøttede Plader er ca. 0,7, for indspændte ca. 0,9. Som fremhævet af Leitz¹⁾ er det imidlertid kun berettiget at benytte denne Faktor, hvis Pladen virkelig besidder den paaregnede Torsionsstivhed og Torsionsstyrke. Endvidere er det nødvendigt ogsaa at armere særligt for selve de vridende Momenter, der ganske vist forsvinder paa de Steder, hvor de bøjende Momenter er størst, men paa den anden Side har deres Maximum,

¹⁾ Der Bauingenieur 1925, S. 920.

Tabel 4 (se S. 184).

Torsionsmomenter i rektangulære Plader med ensformig fordelt Belastning.

$$T_{\max} = \pm \varepsilon \cdot pkl = \pm \varepsilon \cdot P \quad (T_{\max} \text{ i kgm/m for } k \text{ og } l \text{ i m og } p \text{ i t/m}^2).$$



k/l	$\nu_a^1)$	ε	ν_b	ε	ν_c	ε_1	ε_2	ν_d	ε	ν_e	ε_1	ε_2	ε_3	ν_f	ε_1	ε_2
0,5	0,804	32	0,935	7,4	0,886	13,1	16,0	0,841	26,7	0,889	14,1	17,2	16,0	0,933	8,1	6,6
0,6	0,734	39	0,911	9,9	0,839	17,7	21,7	0,818	29,7	0,851	18,5	22,7	20,9	0,906	11,2	9,2
0,7	0,669	44	0,890	12,3	0,790	22,3	27,4	0,814	30,2	0,814	22,2	27,0	25,0	0,879	14,3	11,7
0,8	0,621	47	0,873	14,1	0,742	26,2	32,2	0,825	28,8	0,788	25,0	30,4	28,1	0,852	17,0	14,0
0,9	0,592	49	0,864	15,1	0,703	29,5	36,0	0,846	26,7	0,771	26,6	32,5	30,0	0,831	19,2	15,7
1,0	0,583	49	0,861	15,4	0,665	31,8	38,8	0,861	24,0	0,765	27,0	33,0	30,6	0,815	20,8	17,0

¹⁾ Se S. 176.

og derfor fordrer særlig Armering paa Steder, hvor de bøjende Momenter i Strimlerne er smaa, f. Eks. i Nærheden af en frit understøttet Plades Hjørner.

Naar man ved Beregning af Jernbetonplader gaar ud fra Teorien for isotrope Plader, maa enten Armeringen overalt lægges i Hovedspændingernes Retning, altsaa paa skraa ved en ikke indspændt Plades Hjørner og ligeledes paa skraa omtrent midt i Fjerdedelsfelterne af en indspændt Plade, eller hvis man armerer paa langs og paa tværs som sædvanlig, maa man tage Hensyn til, at Pladen ikke er isotrop, og ved særlig Armering sætte de stærkest vredne Strimler i Stand til at modsætte sig Vridningen — ellers kan den ved Faktoren ν udtrykte Formindskelse af Momenterne ikke paaregnes.

I senere Publikationer¹⁾ gør Marcus nærmere Rede for Vridningsmomenterne i de af ham betragtede Strimler og kommer til det Resultat, at disse Momenter med god Tilnærmelse kan fremstilles som Ordinatorer i Pyramider, hvis Grundflader begrænses af de Linier, hvor enten det vridende eller det bøjende Moment i vedkommende Strimmel er Nul. For en simpelt understøttet Plade bliver der saaledes fire Torsionspyramider (to positive og to negative), der hver har en Pladekvadrant som Grundflade og som Højde et lodret Liniestykke gennem Pladehjørnet. For en indspændt Plade vil Toppunkterne for de fire Pyramider derimod ligge indenfor Hjørnerne i Afstanden $0,2l$ fra den korte og $0,2k$ fra den lange Side. Det største Torsionsmoment, altsaa Pyramidens Højde, i den simpelt understøttede Plade bliver efter Marcus:

$$T_{\max} = -\frac{p}{6} \cdot \nu_a \cdot \frac{l^3 k^3}{l^4 + k^4} = -\frac{p}{6} \left(1 - \frac{5}{6} \frac{l^2 k^2}{l^4 + k^4} \right) \cdot \frac{l^3 k^3}{l^4 + k^4} \text{ kgm/m.}$$

Denne Formel kan man ved at indføre Feltbelastningen $P = pkl$ og Sideforholdet $\frac{k}{l}$ reducere til $T_{\max} = \pm \varepsilon P$, hvor P er Feltbelastningen i Tons, og ε har følgende Værdier:

$$\begin{array}{l} \text{for } \frac{k}{l} = 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8 \quad 0,9 \quad 1,0 \quad \text{og } T_{\max} \text{ i kgm/m} \\ \varepsilon = 32 \quad 39 \quad 44 \quad 47 \quad 49 \quad 49. \end{array}$$

Hvis Hovedarmeringerne i en simpelt understøttet Plade føres ud til Understøtningerne uden Opbøjning, maa Pladehjørnet, for at opnaa Vridningsstivhed, forstærkes med Armering i Oversiden, enten en enkelt Armering i Retning af Vinklens Halveringslinie, eller en Armering med Jern

¹⁾ Udgaven 1929 af Vereinfachte Berechnung samt Der Bauingenieur 1929, S. 497.

i to forskellige Retninger. Hvis derimod alle Jernene bøjes op, maa den supplerende Hjørnearmering indlægges i Undersiden og enten vinkelret paa Vinklens Halveringslinie eller i to forskellige Retninger. Paa lignende Maade vil det ved en indspændt Plade være nødvendigt at gøre de fire Kvadrantmidter stive mod Vridning f. Eks. ved lokalt at indlægge nogle Jern i Oversiden parallelt med Vinklens Halveringslinie og i Undersiden vinkelret paa Halveringslinien, saaledes at der i de stærkest vrede Partier kommer Armering baade i Oversiden og i Undersiden.

Tabel 4 giver Værdierne af Pyramidehøjden T_{\max} for ensformet belastede rektangulære Plader, der er simpelt understøttede eller indspændte langs een eller flere Kanter, og de til Tabellen knyttede Figurer giver Oplysning om Beliggenheden af Pyramidernes Toppunkt og Grundflade. Til hver Plade hører som tidligere nævnt fire Pyramider, to positive og to negative, og Torsionsmomentet T for et vilkaarligt Punkt af Pladen er simpelthen lig Produktet af den totale Feltbelastning P i Tons og Ordinaten i vedkommende Punkt af Pyramiden.

Momentflader.

Ved Hjælp af Tabellerne 1 og 4 kan man med Lethed finde de maximale Bøjningsmomenter $M_{k_{\max}}$ og $M_{l_{\max}}$ for Strimler paa den korte og den lange Led samt største Torsionsmoment T_{\max} .

Momentfladerne for Bøjning, hvis Ordinatorer er M_k og M_l , vil som ovenfor nævnt for en simpelt understøttet Plade med Tilnærmelse kunne betragtes som Prismatoider med Pladen som Grundflade og med Rektanglet $\frac{k}{2} \times \left(l - \frac{k}{2}\right)$ som øvre Endeflade og med henholdsvis $M_{k_{\max}}$ og $M_{l_{\max}}$ som Højde, saaledes at de to Symmetrisnit i Fladerne bliver Trapezer. En noget bedre Tilnærmelse faar man ved at lade Snittet parallelt med den korte Side være en Parabel med Højde $M_{k_{\max}}$ henholdsvis $M_{l_{\max}}$ og lade Snittet i den lange Sides Retning være to halve Parabler med et mellemliggende retliniet Stykke af Længde $l - k$. Det midterste Stykke af hver af de to Momentflader M_k og M_l kommer derved til at bestaa af en parabolisk Cylinder af Længde $l - k$, og til hver Ende af disse Cylindre slutter der sig en pudeformet Flade, saaledes at Snittene i de to Momentflader bliver paa den ene Led lutter Parabler og paa den anden Led to halve Parabler med et mellemliggende retliniet Stykke.

Momentfladerne for Vridning fremstilles som nævnt tilnærmelsesvis ved Pyramider, hvis Ordinat i et vilkaarligt Punkt er proportional med det for den korte og lange Strimmel gennem vedkommende Punkt fælles Torsionsmoment T . I Virkeligheden er Torsionspyramiden ikke en Pyramide, men en noget lavere pudeformet Flade med samme Grundflade og Volumen som Pyramiden.

Momenternes Sammensætning.

For hvert Punkt af Pladen giver Momentfladerne for Bøjning og Vridning tre sammenhørende Værdier af M_k , M_l og T . De resulterende Momenter i de korte og de lange Strimlers Retning vil da i Henhold til Marcus¹⁾ være:

$$m_{ik} = M_k \pm \frac{2 T^2}{\sqrt{(M_k - M_l)^2 - 4 T^2}} \text{ og } m_{il} = M_l \pm \frac{2 T^2}{\sqrt{(M_k - M_l)^2 + 4 T^2}}$$

eller simplere i Henhold til Leitz²⁾:

$$m_{ik} = M_k \pm T \text{ og } m_{il} = M_l \pm T.$$

De resulterende Momenter findes altsaa simpelthen ved Addition og Subtraktion af Ordinaterne i Bøjnings-Prismatoiden (eller -Puden) og Torsionspyramiden. For hvert Punkt af Pladen fremkommer der saaledes to Værdier af m_i , og hvis disse har modsat Fortegn, er det nødvendigt at armere Pladen i begge Sider; men hvis de to Værdier har samme Fortegn, benytter man selvfølgelig kun den numerisk største Værdi og giver Pladen den dertil svarende Armering i den ene Side.

Ønsker man at finde de ideelle Momenter i et eller andet Snit parallelt med de lange Sider, optegner man Snitplanens Skæringslinier med Prismatoiden eller Pudens M_k og med Pyramiderne t , hvorefter man ved at addere, henholdsvis subtrahere, Ordinaterne kan tegne den resulterende Momentkurve, som paa de Steder, hvor der fordres baade øvre og nedre Armering, vil bestaa af en positiv og en negativ Gren. Momentkurvens Areal giver det samlede Jernareal i vedkommende Snit, dens Form giver Jernets Fordeling.

Momenterne i Snit parallel med de korte Sider findes ganske paa samme Maade, blot at man nu skal benytte Prismatoiden eller Pudens M_l i Forbindelse med Pyramiderne T .

Jernarealet i hvert Snit behøver ikke at fordeles i streng Overensstemmelse med den resulterende Momentkurves Ordinate, men man maa i alt Fald sikre sig, at det samlede Jernareal bliver lig med eller større end det til Momentkurvens Areal svarende. Dette kan for en simpelt understøttet Plade tilnærmelsesvis opnaas ved at bestemme den samlede positive Armering i hver af de to Retninger efter Gen nemsnitsmomenterne

¹⁾ Bauingenieur 1926, Heft 30-31.

²⁾ Bauingenieur 1925, S. 717.

$$m_k = \frac{M_{k \max} \pm T_{\max}}{2} \text{ og } m_l = \frac{M_{l \max} \pm T_{\max}}{2}$$

og fordele Jernet efter Skøn, idet man formindsker Jernmængden nær Kantmidterne og supplerer Armeringen nær Hjørnerne ved Tilføjelse af et øvre Net, der kan fremstilles ved at lade Jernene i det nedre Net bøje op langs Pladekanten op fortsætte sig indefter langs Pladens Overside.

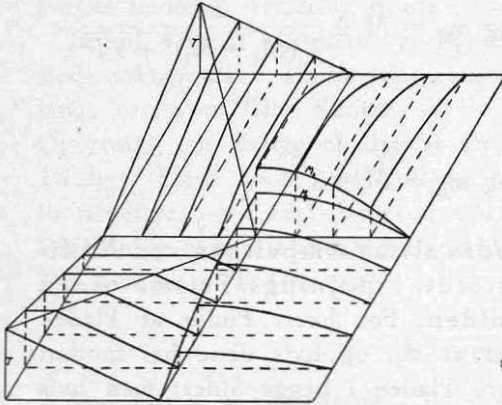


Fig. 2. Simpelt understøttet Plade.

For oven til venstre Snit paa langs i Torsionspyramiden T .

For oven til højre Snit paa langs i Momentfladen M_k for Strimler paa tværs.

For neden til venstre Snit paa tværs i Torsionspyramiden T .

For neden til højre Snit paa tværs i Momentfladen M_l for Strimler paa langs.

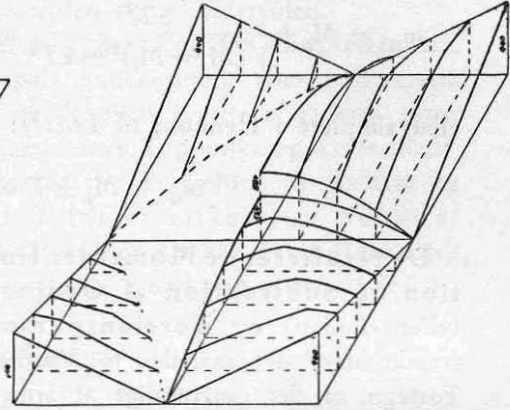


Fig. 3. Simpelt understøttet Plade.

For oven til venstre Snit paa langs i den resulterende negative Momentflade $M_k - T$ for Strimler paa tværs.

For oven til højre Snit paa langs i den resulterende positive Momentflade $M_k + T$ for Strimler paa tværs.

For neden til venstre Snit paa tværs i den resulterende negative Momentflade $M_l - T$ for Strimler paa langs.

For neden til højre Snit paa tværs i den resulterende positive Momentflade $M_l + T$ for Strimler paa langs.

Fig. 2 og 3 viser som illustrerende Eksempel Bestemmelsen af de resulterende positive og negative Momenter i hvert enkelt Punkt af en simpelt understøttet Plade $4 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ med Totalbelastning 20 t . I Henhold til Tabel 1 bliver største bøjende Moment i Strimler paa den korte Led: $44,2 \cdot 20 = 884 \text{ kgm/m}$; paa den lange Led: $28,2 \cdot 20 = 564 \text{ kgm/m}$. Tabel 4 giver største Torsionsmoment: $47,0 \cdot 20 = \pm 940 \text{ kgm/m}$.

I øvre Halvdel af Fig. 2 er der til venstre tegnet forskellige Snit paa langs gennem Torsionspyramiden og til højre de tilsvarende paraboliske Snit i Momentpuden.

Øvre Halvdel af Fig. 3 viser til venstre de resulterende negative Momenter ($M_k - T$) og til højre de resulterende positive Momenter ($M_k + T$).

Nedre Halvdel af Fig. 2 og 3 viser paa tilsvarende Maade forskellige Snit paa tværs gennem Torsionspyramiden og Momentpuden samt de resulterende positive Momenter ($M_l + T$) og negative Momenter ($M_l - T$).

Fig. 4 viser Momentbestemmelsen for en langs alle fire Sider indspændt Plade $4\text{ m} \times 5\text{ m}$ med Totalbelastning 20 t som ovenfor. I Henhold til Tabel 1 bliver største positive Moment 412 og 266 kgm/m , medens største Torsionsmoment i Henhold til Tabel 4 bliver $\pm 282\text{ kgm/m}$. Venstre

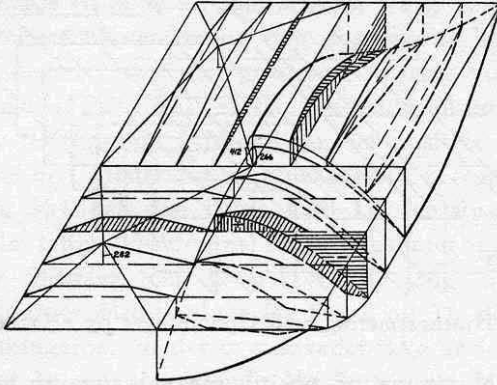


Fig. 4. Indspændt Plade.

For oven til venstre — Snit paa langs i Torsionspyramiden.

For oven til højre — Snit paa langs visende de resulterende positive og negative Momenter ($M_l \pm T$).

For neden til venstre — Snit paa tværs i Torsionspyramiden.

For neden til højre — Snit paa tværs visende de resulterende positive og negative Momenter ($M_k \pm T$).

Side viser Snittene gennem Pyramiderne, og højre Side viser med lodret og vandret Skravering, Snittene paa langs og tværs af Momentpuderne samt med skraa Skravering de til de vridende Momenter svarende Tillæg til de bøjende Momenter.

Fig. 5 giver for den simpelt understøttede og den indspændte Plade (henholdsvis til venstre og til højre) en Oversigt over de positive og de negative Momenter i Strimlerne paa tværs (foroven) og paa langs (forneden). De Arealer, hvor de resulterende Momenter er positive, er skraverede med fuldt optrukne Linier, Arealerne med negativt resulterende Moment er skraverede med punkterede Linier, og de Arealer, hvor der kræves baade positiv og negativ Armering, er skraverede paa begge Maader.

Fig. 6 viser Jernføringen i Nærheden af et Hjørne af den simpelt understøttede Plade. Den positive Armering paa tværs lægges nærst (d. v. s. under den positive Armering

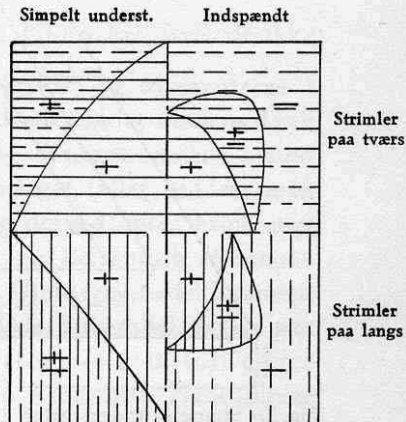


Fig. 5. Oversigt over Momenterne i den simpelt understøttede Plade (til venstre) og den indspændte Plade (til højre).

paa langs). Den negative Armering fremstilles hensigtsmæssigst ved Om-
bøjning opefter af de positive Armeringsjern. Da der i Nærheden af selve

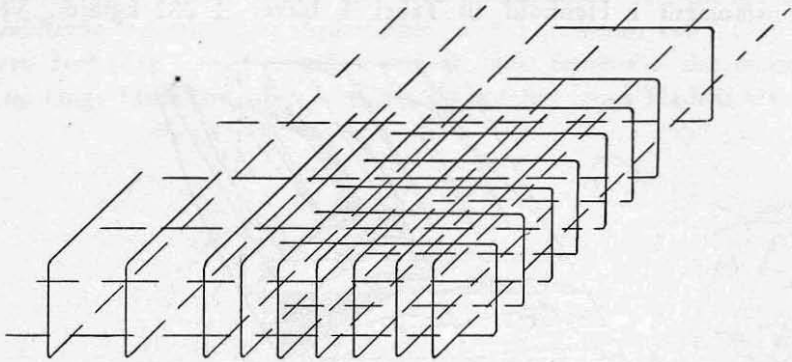


Fig. 6. Hjørnearmering med Opbøjninger og »Haarnaale«.

Hjørnet kræves Maximum af positiv saa vel som af negativ Armering,
kan Armeringen her passende suppleres med »Haarnaale« som indlægges
vinkelret paa Pladekanten og har deres ene Gren liggende i Pladens Over-
side, den anden i Undersiden.

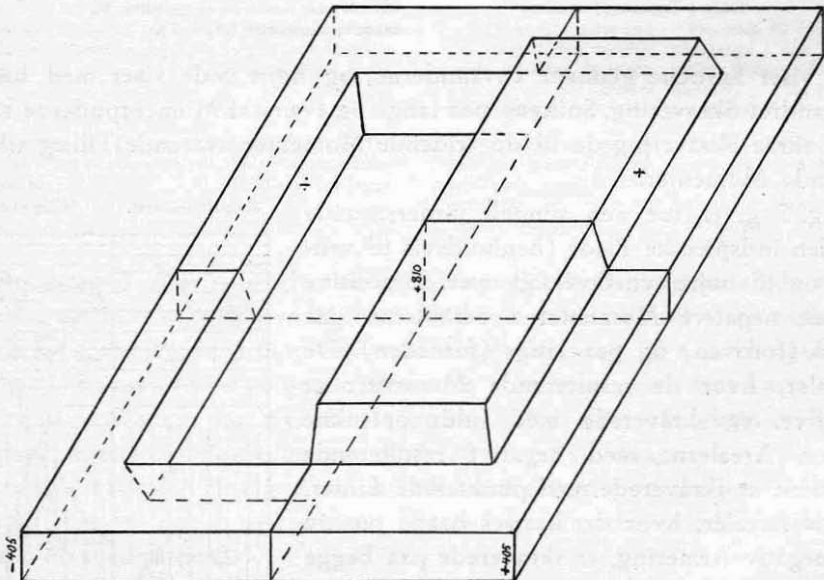


Fig. 7. Simpelt understøttet Plade. Armering efter Middelendehedsmomentet med Halvdelen af Jernene opbøjet (negativ Armering til venstre, positiv Armering til højre).

I Fig. 7 er til Sammenligning optegnet Middelendehedsmomentet i Henhold
til Jernbetonnormerne af 1930 (se ogsaa E. Suenson: Jernbeton 1918, S. 163

og 164) for den samme Plade, som er behandlet i Fig. 2 og 3. Momentet paa langs og paa tværs skal her regnes ens, nemlig $20000:24.6 = 810$ kgm/m, og hvis man, som det vel er almindeligt, opbøjer hvertandet Jern i Afstanden $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{5}$ fra Understøtningerne, kommer den til Armeringen svarende Momentflade til at se ud som antydet i Fig. 7, hvor den negative Momentflade er tegnet til venstre og den positive til højre. I Hjørnerne svarer saavel den negative som den positive Armering kun til 405 kgm/m, altsaa mindre end Halvdelen af det vridende Moment, som ovenfor er fundet at være 940 kgm/m. I Midten er det positive Moment i begge Retninger 810 kgm/m i Stedet for de efter Marcus beregnede Værdier 884 paa den korte og 564 paa den lange Led. Der er altsaa Underskud af Armeringsmateriale langs Vinklernes Halveringslinier og i de midterste Dele af de korte Strimler, men Overskud i de lange Strimler og i Partierne omkring Sidernes Midtpunkter (se Fig. 2 og 3). Bøjes Jernene ikke op ved Understøtningerne, vil der overhovedet ikke findes Jern i Hjørnernes Overside til at optage de vridende Momenter, og der vil fremkomme Trækrevner i Oversiden vinkelret paa Vinklernes Halveringslinier.

Understøtningsreaktioner.

For jævn Belastning og enten simpel Understøtning langs alle fire Sider eller Indspænding langs alle fire Sider regnes efter de danske Normer af 1930 Reaktionen for hver af de korte Sider at svare til det trekantede Areal $\frac{k^2}{4}$ og for hver af de lange Side at svare til det trapezformede Areal $\frac{kl}{2} - \frac{k^2}{4}$. Naar Pladen er simpelt understøttet, vil Hjørnerne, hvis de ikke fastholdes, løfte sig op fra de understøttende Bjælker, og Momenterne i disse Bjælker vil i saa Fald blive noget større end ellers, idet Pladens Tryk paa Underlaget som Følge af Hjørnernes Løftning koncentrerer mere mod Midten. Trykker man Hjørnerne ned mod Underlaget (eller hindrer man dem i at hæve sig), vil Trykket paa Bjælkerne og derved ogsaa Momentet i samme yderligere forøges, nemlig svarende til en Belastning af samme Størrelse som det Tryk C , der fordres til at holde Hjørnerne nede. Summen af de fire Hjørnetryk C og altsaa ogsaa den samlede Tillægsbelastning paa de fire Bjælker varierer efter Marcus fra $0,39 Q$ for $l = k$ til $0,25 Q$ for $l = 2k$. Belastningen paa hver Randbjælke for en kvadratisk Plade bliver altsaa i Virkeligheden ikke $0,25 Q$ man $0,35 Q$, og Momenterne i disse Bjælker vil forøges væsentligt. Hjørnerne maa armeres mod Forskydning.

Om de til det trekantede og det trapezformede Areal svarende Reaktionen i Virkeligheden fordeler sig som Trekantbelastning og Trapezbelast-

ning, og om Understøtningsreaktionerne svarende til de fire Hjørnetryk C er af samme Størrelse for de korte og for de lange Sider, og om disse Reaktioner fordeler sig parabelformig eller paa anden Maade, er Spørgsmaal, som det vilde være af Interesse at undersøge nærmere.

Det bemærkes, at Tilnærmelsesberegningen for Momenterne i Pladen er opstillet under den Forudsætning, at Pladeranden forbliver plan. Heraf følger f. Eks., at hvis Hjørnerne i en simpelt understøttet Plade ikke som forudsat holdes effektivt nede, vil Momenterne inde i Pladen forøges.

Marcus slutter sin Bog med den Bemærkning, at Resultaterne af de af det tyske Ausschuss für Eisenbeton udførte nyere Forsøg viser, at der med samme regningsmæssige Paavirkninger opnaas en væsentlig højere Sikkerhedsgrad for krydsarmerede Plader end for enkeltarmerede Plader, og at naar man ved Fastsættelsen af de tilladelige Spændinger tager denne Omstændighed med i Betragtning, vil krydsarmerede Plader, som i Forvejen byder saa store økonomiske og konstruktive Fordele, sikkert finde endnu større Anvendelse end hidtil.

Resumé.

Paa Grundlag af Dr. Ing. Marcus's Vereinfachte Berechnung biegsamer Platten er der med Feltbelastning og Sideforhold som Variable udregnet let anvendelige Tabeller¹⁾ over Momenter i simpelt understøttede og indspændte Plader (Tabel 1), i Pladerækker (Tabel 2) og Pladegrupper (Tabel 3), samt over Torsionsmomenterne i simpelt understøttede og indspændte Plader (Tabel 4). Efter Leitz angives Torsionsmomenternes Sammensætning med Bøjningsmomenterne, og Resultatet af Kombinationen illustreres i Fig. 2—5. I Fig. 7 vises (til Sammenligning med Fig. 3) Modstandsevnen overfor positive og negative Momenter i en efter Middelenhedsmomentet (Normerne af 1930) armeret simpelt understøttet Plade. Endelig gøres der opmærksom paa den Forøgelse i Randbjælkernes Momenter, som vil finde Sted, hvis Hjørnerne holdes nede, og paa den Formindskelse i Pladens Bæreevne, som vil finde Sted, hvis Hjørnerne ikke holdes nede.

¹⁾ Selv om man ikke ønsker at følge Marcus, vil tilsvarende Tabeller beregnede paa Basis af Formlerne i de danske Normer betyde en væsentlig Arbejdsbesparelse, hvis man har mange forskellige Plader at beregne.